**Методическая разработка занятия**

**по программе элективного курса**

**«Олимпиадные задачи по математике» в 10 классе**

**учителя Государственного общеобразовательного учреждения Республики Коми**

 **«Физико-математический лицей-интернат»**

**Гагариной Наталии Юрьевны**

**по теме «Метод тождественных многочленов»**

Занятие по данной теме проводится в рамках программы элективного курса ГОУ РК «ФМЛИ» «Олимпиадные задачи по математике» в 10 классе. При обосновании рассматриваемого метода применяется теоретический материал, изученный на уроках алгебры в 8-ом классе по теме «Многочлены от одной переменной с действительными коэффициентами». Указанный метод позволяет более рационально решать некоторые типы задач на многочлены.

На уроке сначала обосновывается метод тождественных многочленов, то есть формулируется теорема и её следствия о том, что многочлен степени n не может иметь более n различных корней. С доказательством этой теоремы учащиеся были уже ознакомлены ранее. Затем учащимся предлагаются задачи, в том числе и олимпиадные, при решении которых используется указанный метод.

**Цель урока**: дать представление о методе тождественных многочленов.

**Задачи урока**:

1. Обосновать метод тождественных многочленов;
2. Применить метод тождественных многочленов при решении олимпиадных задач;
3. Расширить и углубить знания учащихся по теме «Многочлены с действительными коэффициентами»;
4. Привить интерес обучающихся к изучению различных математических методов, позволяющих решать олимпиадные задачи.

**Ход урока**:

*Вводный рассказ учителя.*

При решении практически любой задачи приходится делать те или иные преобразования. Зачастую её сложность полностью определяется степенью сложности и объемом преобразований, которые необходимо выполнить. При решении некоторых задач, связанных с преобразованием алгебраических выражений, тратится много времени, а иногда допускаются и ошибки. Метод тождественных многочленов, о котором пойдет речь на уроке, дает возможность получать более краткие решения таких задач. Сначала мы повторим алгебраическое утверждение о том, что многочлен степени n не может иметь более n различных корней и сформулируем очевидное следствие обсуждаемой теоремы. Далее для иллюстрации применения этой теоремы и её следствия рассмотрим несколько примеров на упрощение выражений и доказательство тождеств, в которых в полной мере проявляются простота и сила излагаемого метода. Обратим особое внимание на олимпиадные задачи, при решении которых рационально использовать метод тождественных многочленов.

*Подготовка к изучению нового материала через повторение и актуализацию опорных знаний.*

Вспомним одну из теорем, доказанную в 8 классе при изучении темы «Многочлены с действительными коэффициентами», а также ее следствие (на экране представлены их формулировки).

**Теорема.**

*Пусть Pn(x) = a0 + a1x + a2x2 + … + anxn – многочлен. Если имеется (n + 1) попарно различных значений xk (k = 0, 1, 2, …, n), для каждого из которых Pn(xk) = 0, то Pn(x) = 0 для всех x ∈ R, более того a0 = a1 = a2 = … = an = 0.*

**Следствие**Если для многочленов Pn(x) и Mn(x) Mn(x) = a$'$0 + a$'$1x + a$'$2x2 + … + a$'$nxnимеются попарно различные значения xk ( k = 0, 1,2, …, n), для каждого из которых выполняется Pn(xk) = Mn(xk), то Pn(x) = Mn(x) для всех x∈ R и ak = a$'$k для любого k = 0, 1, 2, …, n.

*Изучение нового материала.*

Проиллюстрируем применение этой теоремы и её следствия, т.е. покажем, как с их помощью можно легко доказывать тождественные равенства многочленов и их соответствующих коэффициентов, что, в свою очередь, позволяет получать весьма краткие решения некоторых нестандартных уравнений и задач на упрощение алгебраических выражений (на экране представлены тексты заданий).

**Пример 1.** Упростите выражения:
$1) \frac{1}{\left(a-b\right)(a-c)}+ \frac{1}{\left(b-a\right)(b-c)}+ \frac{1}{\left(c-b\right)(c-a)}$;
$2) \frac{b+c}{\left(a-b\right)(a-c)}+ \frac{a+c}{\left(b-a\right)(b-c)}+ \frac{a+b}{\left(c-b\right)(c-a)}$;
$3) \frac{bc}{\left(a-b\right)(a-c)}+ \frac{ac}{\left(b-a\right)(b-c)}+ \frac{ab}{\left(c-b\right)(c-a)}$.
**Решение.** Мы не будем упрощать каждое из выражений в отдельности, применяя привычные приемы, основанные на приведении дробей к наименьшему общему знаменателю, поскольку наша цель – иллюстрация применения теоремы при n = 2.

Ясно, что здесь a ≠ b, b ≠ c, c ≠ a. Пусть P0(x) = $\frac{\left(x-b\right)(x-c)}{\left(a-b\right)(a-c)}+ \frac{\left(x-a\right)(x-c)}{\left(b-a\right)(b-c)}+ \frac{\left(x-a\right)(x-b)}{\left(c-b\right)(c-a)}$.
Это многочлен второго порядка, причем P0(a) = 1 + 0 + 0 = 1, P0(b) = 0 + 1 + 0 = 1, P0(c) = 0 + 0 + 1 = 1.
Следовательно, для многочлена P0(x) – 1 выполнены условия теоремы при n = 2, поэтому P0(x) – 1≡0, то есть P0(x) = 1 для всех действительных чисел x.
Представим многочлен P0(x) в стандартном виде P0(x) = αx2 + βx + γ. В данном случае, как легко заметить,
α = $\frac{1}{\left(a-b\right)(a-c)}+ \frac{1}{\left(b-a\right)(b-c)}+ \frac{1}{\left(c-b\right)(c-a)}$;
β = $\frac{b+c}{\left(a-b\right)(a-c)}+ \frac{a+c}{\left(b-a\right)(b-c)}+ \frac{a+b}{\left(c-b\right)(c-a)}$;
γ = $\frac{bc}{\left(a-b\right)(a-c)}+ \frac{ac}{\left(b-a\right)(b-c)}+ \frac{ab}{\left(c-b\right)(c-a)}$.
Следовательно, α = β = γ - 1 = 0.
**Ответ:** 1) 0; 2) 0; 3) 1.

**Пример 2.** *(7-я Соросовская олимпиада, 11 класс.)*При всех допустимых значениях a, b и c решите уравнение
$$a\* \frac{\left(x-b\right)\left(x-c\right)}{\left(a-b\right)\left(a-c\right)}+ b\*\frac{\left(x-a\right)\left(x-c\right)}{\left(b-a\right)\left(b-c\right)}+ c\*\frac{\left(x-a\right)\left(x-b\right)}{\left(c-a\right)\left(c-b\right)}=x^{2}$$

**Решение.** Ясно, что здесь также a ≠ b, b ≠ c, c ≠ a. Рассмотрим многочлен
$$P\_{1}\left(x\right)= a\* \frac{\left(x-b\right)(x-c)}{\left(a-b\right)\left(a-c\right)}+ b\*\frac{\left(x-a\right)(x-c)}{\left(b-a\right)(b-c)}+ c\*\frac{\left(x-a\right)\left(x-b\right)}{\left(c-a\right)(c-b)} $$

Замечаем, что P1(a) = a, P1(b) = b, P1(c) = c. Это наводит не предположение, что P1(x) = x на R.
Действительно, многочлен P1(x) - x имеет степень 2 и удовлетворяет условиям теоремы (1) при n = 2. Поэтому P1(x) – x = 0 для всех x из R. Это означает, что исследуемое уравнение равносильно уравнению x= x2. Отсюда имеем x1 = 0,x2 = 1.
**Ответ:** 0;1.

В качестве иллюстрации полезности следствия к теореме рассмотрим следующий пример:
**Пример 3.** Докажите равенство:
а) 1 + x4  = (1 + x$\sqrt{2}+x^{2})(1-x\sqrt{2}+ x^{2})$
$$б) 1 + x^{6} = (1 + x^{2})(1 + x\sqrt{3}+ x^{2})\left(1-x\sqrt{3}+x^{2}\right).$$

Прежде чем привести решение, отметим, что задачи такого типа можно решить либо стандартно перемножая многочлены (и приводя подобные члены), либо применяя формулы сокращенного умножения. Например, в случае задания а) можно предложить следующее доказательство:
$\left(1+x\sqrt{2 }+ x^{2}\right)\left(1-x\sqrt{2}+x^{2}\right)=\left(\left(1+x^{2}\right)+ x\sqrt{2}\right)\left(\left(1+ x^{2}\right)- x\sqrt{2}\right)=(1+ x^{2})^{2}- (x\sqrt{2})^{2}=\left(1+2x^{2}+ x^{4}\right)- 2x^{2}=1+ x^{4}.$
Но, зная приведенное выше следствие, можно привести следующее решение:
а) легко увидеть, что если бы скобки в правой части доказываемого равенства были раскрыты, то получился бы многочлен степени 4. В левой части также многочлен степени 4. Таким образом, в силу следствия достаточно убедиться, что значение выражений в левой и правой частях доказываемого равенства в каких-нибудь пяти различных точках равны. Действительно, в данном случае имеем:
x = 0 ⇒ 1 = 1\*1;
x = ±1 ⇒ 2 = (2 ± $\sqrt{2})(2\mp \sqrt{2}$) = 4 – 2 = 2;
x = ±2 ⇒ 17 = (5 ± $2\sqrt{2})(5\mp 2\sqrt{2}$ ) = 25 – 8 =17.
б) Аналогично, достаточно проверить это равенство, например,
при x = 0; ±1; ±2; ±$\sqrt{3}$.

*Первичное осмысление и закрепление материала, изученного на уроке:*

Попробуйте самостоятельно решить следующий пример, применяя метод тождественных многочленов(на экране представлен текст задания).

**Пример 4.** Докажите тождество:
а) $\frac{\left(x-b\right)(x-c)}{\left(a-b\right)\left(a-c\right)}+\frac{\left(x-a\right)(x-c)}{\left(b-a\right)(b-c)}+\frac{\left(x-a\right)\left(x-b\right)}{\left(c-a\right)(c-b)}= 1$;
б) $a\* \frac{\left(x-b\right)(x-c)}{\left(a-b\right)\left(a-c\right)}+ b\*\frac{\left(x-a\right)(x-c)}{\left(b-a\right)(b-c)}+ c\*\frac{\left(x-a\right)\left(x-b\right)}{\left(c-a\right)(c-b)}= x$;
в) $a^{2}\* \frac{\left(x-b\right)(x-c)}{\left(a-b\right)\left(a-c\right)}+ b^{2}\*\frac{\left(x-a\right)(x-c)}{\left(b-a\right)(b-c)}+c^{2}\*\frac{\left(x-a\right)\left(x-b\right)}{\left(c-a\right)(c-b)}=x^{2}$
**Указание**: Ясно, что во всех трех случаях достаточно убедиться в истинности этих равенств при x = $a$, x = b, x = c.

*Подведение итогов. Домашнее задание.*

* На уроке мы рассмотрели применение метода тождественных многочленов при решении различных задач, связанных с преобразованием алгебраических выражений.
* С помощью данного метода легко решаются задачи на упрощение выражений и доказательство тождеств.
* Данный метод рекомендуется для использования при подготовке к олимпиадам различного уровня.

В качестве домашнего задания предлагается решить методом тождественных многочленов следующие примеры (на экране представлены тексты заданий):

**Пример 6.** Положим$$S\_{k}= \frac{a^{k}}{\left(a-b\right)\left(b-c\right)}+\frac{b^{k}}{\left(b-a\right)\left(b-c\right)}+\frac{c^{k}}{\left(c-a\right)\left(c-b\right)}.$$

Докажите, что
S0=S1=0, S2=1, S3=a + b + c, S4=a2 + b2 + c2 + ab + bc + ac,
S5=a3 + b3 + c3 + a2b + ab2 + a2c + ac2 + b2c + bc2 + abc.

**Пример 7.***(7-я Соросовская олимпиада, 9 класс.)*

При всех допустимых значениях a и b решите уравнение

$$\frac{x^{3}}{\left(x-a\right)(x-b)}+\frac{a^{3}}{\left(a-x\right)(a-b)}+\frac{b^{3}}{\left(b-a\right)(b-x)}= x^{2}+b+a.$$

В заключении хочется отметить, что данный метод вызывает интерес у учащихся, мотивирует их на поиск олимпиадных заданий, при решении которых возможно применение указанного метода. Занятия такого рода прививают заинтересованность к изучению различных математических методов, позволяющих решать олимпиадные задачи.