**Методическая разработка занятия**

**по программе элективного курса**

**«Олимпиадные задачи по математике» в 10 классе**

**учителя Государственного общеобразовательного учреждения Республики Коми**

**«Физико-математический лицей-интернат»**

**Гагариной Наталии Юрьевны**

**по теме «Метод тождественных многочленов»**

Занятие по данной теме проводится в рамках программы элективного курса ГОУ РК «ФМЛИ» «Олимпиадные задачи по математике» в 10 классе. При обосновании рассматриваемого метода применяется теоретический материал, изученный на уроках алгебры в 8-ом классе по теме «Многочлены от одной переменной с действительными коэффициентами». Указанный метод позволяет более рационально решать некоторые типы задач на многочлены.

На уроке сначала обосновывается метод тождественных многочленов, то есть формулируется теорема и её следствия о том, что многочлен степени n не может иметь более n различных корней. С доказательством этой теоремы учащиеся были уже ознакомлены ранее. Затем учащимся предлагаются задачи, в том числе и олимпиадные, при решении которых используется указанный метод.

**Цель урока**: дать представление о методе тождественных многочленов.

**Задачи урока**:

1. Обосновать метод тождественных многочленов;
2. Применить метод тождественных многочленов при решении олимпиадных задач;
3. Расширить и углубить знания учащихся по теме «Многочлены с действительными коэффициентами»;
4. Привить интерес обучающихся к изучению различных математических методов, позволяющих решать олимпиадные задачи.

**Ход урока**:

*Вводный рассказ учителя.*

При решении практически любой задачи приходится делать те или иные преобразования. Зачастую её сложность полностью определяется степенью сложности и объемом преобразований, которые необходимо выполнить. При решении некоторых задач, связанных с преобразованием алгебраических выражений, тратится много времени, а иногда допускаются и ошибки. Метод тождественных многочленов, о котором пойдет речь на уроке, дает возможность получать более краткие решения таких задач. Сначала мы повторим алгебраическое утверждение о том, что многочлен степени n не может иметь более n различных корней и сформулируем очевидное следствие обсуждаемой теоремы. Далее для иллюстрации применения этой теоремы и её следствия рассмотрим несколько примеров на упрощение выражений и доказательство тождеств, в которых в полной мере проявляются простота и сила излагаемого метода. Обратим особое внимание на олимпиадные задачи, при решении которых рационально использовать метод тождественных многочленов.

*Подготовка к изучению нового материала через повторение и актуализацию опорных знаний.*

Вспомним одну из теорем, доказанную в 8 классе при изучении темы «Многочлены с действительными коэффициентами», а также ее следствие (на экране представлены их формулировки).

**Теорема.**

*Пусть Pn(x) = a0 + a1x + a2x2 + … + anxn – многочлен. Если имеется (n + 1) попарно различных значений xk (k = 0, 1, 2, …, n), для каждого из которых Pn(xk) = 0, то Pn(x) = 0 для всех x ∈ R, более того a0 = a1 = a2 = … = an = 0.*

**Следствие**Если для многочленов Pn(x) и Mn(x) Mn(x) = a0 + a1x + a2x2 + … + anxnимеются попарно различные значения xk ( k = 0, 1,2, …, n), для каждого из которых выполняется Pn(xk) = Mn(xk), то Pn(x) = Mn(x) для всех x∈ R и ak = ak для любого k = 0, 1, 2, …, n.

*Изучение нового материала.*

Проиллюстрируем применение этой теоремы и её следствия, т.е. покажем, как с их помощью можно легко доказывать тождественные равенства многочленов и их соответствующих коэффициентов, что, в свою очередь, позволяет получать весьма краткие решения некоторых нестандартных уравнений и задач на упрощение алгебраических выражений (на экране представлены тексты заданий).

**Пример 1.** Упростите выражения:  
;  
;  
.  
**Решение.** Мы не будем упрощать каждое из выражений в отдельности, применяя привычные приемы, основанные на приведении дробей к наименьшему общему знаменателю, поскольку наша цель – иллюстрация применения теоремы при n = 2.

Ясно, что здесь a ≠ b, b ≠ c, c ≠ a. Пусть P0(x) = .  
Это многочлен второго порядка, причем P0(a) = 1 + 0 + 0 = 1, P0(b) = 0 + 1 + 0 = 1, P0(c) = 0 + 0 + 1 = 1.   
Следовательно, для многочлена P0(x) – 1 выполнены условия теоремы при n = 2, поэтому P0(x) – 1≡0, то есть P0(x) = 1 для всех действительных чисел x.  
Представим многочлен P0(x) в стандартном виде P0(x) = αx2 + βx + γ. В данном случае, как легко заметить,   
α = ;  
β = ;  
γ = .  
Следовательно, α = β = γ - 1 = 0.  
**Ответ:** 1) 0; 2) 0; 3) 1.  
  
**Пример 2.** *(7-я Соросовская олимпиада, 11 класс.)*При всех допустимых значениях a, b и c решите уравнение  
  
**Решение.** Ясно, что здесь также a ≠ b, b ≠ c, c ≠ a. Рассмотрим многочлен   
  
Замечаем, что P1(a) = a, P1(b) = b, P1(c) = c. Это наводит не предположение, что P1(x) = x на R.   
Действительно, многочлен P1(x) - x имеет степень 2 и удовлетворяет условиям теоремы (1) при n = 2. Поэтому P1(x) – x = 0 для всех x из R. Это означает, что исследуемое уравнение равносильно уравнению x= x2. Отсюда имеем x1 = 0,x2 = 1.  
**Ответ:** 0;1.

В качестве иллюстрации полезности следствия к теореме рассмотрим следующий пример:  
**Пример 3.** Докажите равенство:  
а) 1 + x4  = (1 + x  
  
Прежде чем привести решение, отметим, что задачи такого типа можно решить либо стандартно перемножая многочлены (и приводя подобные члены), либо применяя формулы сокращенного умножения. Например, в случае задания а) можно предложить следующее доказательство:  
   
Но, зная приведенное выше следствие, можно привести следующее решение:  
а) легко увидеть, что если бы скобки в правой части доказываемого равенства были раскрыты, то получился бы многочлен степени 4. В левой части также многочлен степени 4. Таким образом, в силу следствия достаточно убедиться, что значение выражений в левой и правой частях доказываемого равенства в каких-нибудь пяти различных точках равны. Действительно, в данном случае имеем:  
x = 0 ⇒ 1 = 1\*1;  
x = ±1 ⇒ 2 = (2 ± ) = 4 – 2 = 2;  
x = ±2 ⇒ 17 = (5 ± ) = 25 – 8 =17.  
б) Аналогично, достаточно проверить это равенство, например,  
при x = 0; ±1; ±2; ±.

*Первичное осмысление и закрепление материала, изученного на уроке:*

Попробуйте самостоятельно решить следующий пример, применяя метод тождественных многочленов(на экране представлен текст задания).

**Пример 4.** Докажите тождество:  
а) ;  
б) ;  
в)   
**Указание**: Ясно, что во всех трех случаях достаточно убедиться в истинности этих равенств при x = , x = b, x = c.

*Подведение итогов. Домашнее задание.*

* На уроке мы рассмотрели применение метода тождественных многочленов при решении различных задач, связанных с преобразованием алгебраических выражений.
* С помощью данного метода легко решаются задачи на упрощение выражений и доказательство тождеств.
* Данный метод рекомендуется для использования при подготовке к олимпиадам различного уровня.

В качестве домашнего задания предлагается решить методом тождественных многочленов следующие примеры (на экране представлены тексты заданий):

**Пример 6.** Положим  
Докажите, что  
S0=S1=0, S2=1, S3=a + b + c, S4=a2 + b2 + c2 + ab + bc + ac,  
S5=a3 + b3 + c3 + a2b + ab2 + a2c + ac2 + b2c + bc2 + abc.

**Пример 7.***(7-я Соросовская олимпиада, 9 класс.)*

При всех допустимых значениях a и b решите уравнение

В заключении хочется отметить, что данный метод вызывает интерес у учащихся, мотивирует их на поиск олимпиадных заданий, при решении которых возможно применение указанного метода. Занятия такого рода прививают заинтересованность к изучению различных математических методов, позволяющих решать олимпиадные задачи.